Position du graphe par rapport à sa tangente en un point a

Résumé

Il s'agit ici d'étudier la relation existant entre d'une part le signe de la dérivée *n-ième* d'un fonction en un point a et d'autre part la position du graphe de la fonction par rapport à la tangente en ce même point. Ce résultat peut facilement se déduire d'un développement limité à l'ordre n de la fonction en ce point, néammoins ce n'est pas cette méthode que nous utiliserons, et ce afin de mettre en oeuvre des concepts divers et variés.
Des suggestions? Laissez un message ici : <*lhooq4me@yahoo.fr*>)

Le résultat en question repose principalement sur le lemme suivant :

Lemme *Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions définies sur un $I =]a, K[, K > a$ (respectivement $J =]K, a[, K < a$) que l'on suppose dérivables en tout point de I (resp. J), avec B et B' non-nul sur I (resp. J), et $\lim_{x\to a} A(x) = 0 = \lim_{x\to a} B(x)$. Alors pour tout $x \in I$ (resp. J), il existe $a < x_1 < x$ (resp. $x < x_1 < a$) tel que $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'(x_1)}{B'(x_1)}$.*

Démonstration : Soit $x \in I$. On définit alors la fonction $C(h) = A(x)B(h) - A(h)B(x)$ pour $h \in]a, x]$, avec $C(a) = 0$ (du fait du prolongement par continuité de C en a). La fonction C est donc continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $I =]a, x[$ et telle que $C(a) = C(x) = 0$. On déduit donc du lemme de Rolle qu'il existe $h = x_1 \in]a, x[$ tel que $C'(x_1) = A(x)B'(x_1) - A'(x_1)B(x) = 0$, soit :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'(x_1)}{B'(x_1)}, a < x_1 < x$$

Cqfd

Ce lemme est intéressant dans le cas d'une étude de limite en un point d'un quotient de deux fonctions puisqu'il nous permet de la ramener à l'étude de la limite en ce même point du quotient des fonctions dérivées, chose que nous abordons dans la proposition suivante [1] :

Proposition *Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions définies dans un voisinage I de a. On suppose ces deux fonctions dérivables chacune n fois dans un voisinage de a, avec $\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}, B^{(k)}(x)$ non nulle sur $I - \{a\}$, et, $\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$, $\lim_{x\to a} A^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to a} B^{(k)}(x)$. Alors $\lim_{x\to a} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to a} \frac{A^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)}$.*

Démonstration : Soit $x \in I$ tel que $a < x$. Nous déduisons du lemme précédent qu'il existe une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ dans I (avec $a < x_n < \ldots < x_k < \ldots < x_2 < x_1 < x$) tels que :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A^{(1)}(x_1)}{B^{(1)}(x_1)} = \frac{A^{(2)}(x_2)}{B^{(2)}(x_2)} = \ldots = \frac{A^{(k)}(x_2)}{B^{(k)}(x_2)} = \ldots = \frac{A^{(n)}(x_n)}{B^{(n)}(x_n)}$$

Ainsi :

$$\forall x \in I(a < x), \exists x' \in I(a < x' < x) \backslash \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A^{(n)}(x')}{B^{(n)}(x')}$$

Supposons alors que $\frac{A(x)}{B(x)}$ admette une limite finie [2] l en a. Etant donné ϵ, nous savons alors qu'il existe un réel η tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a < x < \eta$, on a :

$$\left|\frac{A(x)}{B(x)} - l\right| < \epsilon$$

Or :

$$a < x' < x < \eta \Rightarrow \left|\frac{A^{(n)}(x')}{B^{(n)}(x')} - l\right| = \left|\frac{A(x)}{B(x)} - l\right| < \epsilon$$

Nous avons donc montré qu'étant donné ϵ, il existe un réel η tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a < x < \eta$, on a

$$\left|\frac{A^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)} - l\right| < \epsilon.$$

Or ceci est l'exacte définition de $\lim_{x\to a^+} \frac{A^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)} = l$. Nous montrons de la même manière que $\lim_{x\to a^-} \frac{A^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)} = l$. Soit :

$$\lim_{x\to a} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to a} \frac{A^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)}$$

1. Il s'agit en fait d'une généralisation de «la règle de l'Hospital» que l'on utilise pour lever des indéterminations.

2. Cette hypothèse est en fait sous-entendue lorsque nous écrivons $\lim_{x\to a} \frac{A(x)}{B(x)}$ dans l'énoncé de la proposition.

Cqfd

De là nous déduisons …

Corollaire *Soit f une fonction définie dans un voisinage de a. On suppose f dérivable $n-fois$ $(n \geq 2)$ dans un voisinage de a, la dérivée n-ième pouvant n'exister qu'en a, et telle que si $n \geq 3$, on a pour tout $k \in \{2,3\ldots,n-1\}$, $f^{(k)}(a) = 0$.*
Alors si $f^{(n)}(a) > 0$ (resp. < 0), il existe $\eta > 0$ tel que le graphe soit au-dessus (resp. en-dessous) de la tangente en a sur $a < x < a+\eta$. Pour $a-\eta < x < a$, le graphe est au-dessus (resp. en-dessous) si n est pair, en dessous (resp. au-dessus) si n est impair. Si n est impair et $f^{(n)}(a)$ non nulle[3] en a, nous avons ainsi un point d'inflexion. Si n est pair et $f'(a) = 0$, on a alors un extremum local en a.

Démonstration : Soit $H(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]}{(x-a)^n}$ définie sur $J = I - \{a\}$, où $f(a) + f'(a)(x-a)$ désigne l'équation de la tangente au point a. Pour tout $k \in \{0,1,2,\ldots,n-2\}$, $\lim_{x\to a} A^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to a} B^{(k)}(x)$ et pour tout $k \in \{0,1,2,\ldots n-1\}$, $B^{(k)}(x)$ est non-nulle sur $I - \{a\}$. On déduit donc du corollaire précédent que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)}$$

Sachant que f admet une dérivée *n-ième* en a notée alors $f^{(n)}(a)$, on a $\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a)$, soit :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Supposons alors que $f^{(n)}(a) > 0$. Etant donné alors $\epsilon = f^{(n)}(a)$, on sait d'après la définition de la limite qu'il existe un réel η tel que pour tout $x \in I - \{a\}$ vérifiant $|x-a| < \eta$, on a :

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} - \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^n} \leq \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| < \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Soit :

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^n} > 0$$

3. Si $f^{(n)}(a) = 0$, tous les cas de figure sont alors envisageables : traverse une fois, une infinité de fois…

Si n est pair on a que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$:

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$$

Il existe bien $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $f(x)$ est au-dessus de la tangente en a.. De plus, si $f'(a) = 0$, on en déduit qu'étant donné $x \in]a-\eta, a+\eta[$, on a $f(x) - f(a) > 0$: f admet donc un minimum local en a, *d'où la concavité locale*. Si n est impair, on montre de même qu'à droite de a, le graphe est au-dessus de la tangente en a et qu'à gauche de a le graphe est en-dessous, *d'où le point d'inflexion en a.*

Si $f^{(n)}(a) < 0$, on montre de même (en posant $\epsilon = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ldots$)que pour n pair, le graphe est en-dessous de la tangente dans un voisinage de a. Si n est impair, nous avons à nouveau un point d'inflexion en a. Et enfin si $f'(a) = 0$ et n est pair, clairement f admet un maximum local en a, d'où la convexité locale.

Cqfd